

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1-3: risposta giusta = 2, risposta non data = 0, risposta sbagliata = -1. Esercizi 4-5: punti 0-6.

Esercizio 1 Sia f continua in $[0, +\infty)$ tale che $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$ nel senso degli integrali impropri.

1. Esiste $x_0 > 0$ tale che $f(x) \geq \frac{3}{x}$ per $x \in [x_0, +\infty)$. V F

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{3n}^{2e^n} f(x) dx = +\infty$. V F

3. Esiste $x_0 \geq 0$ tale che $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx = 2$. V F

4. La funzione $g(x) = |f(x) + 5|$ è limitata. V F

Esercizio 2 Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione 1-periodica non costante.

1. $f' + 5$ è periodica. V F

2. Esiste finito $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. V F

3. $2 + f$ è Lipschitziana. V F

4. Se $\int_0^1 f(x) dx = 0$, allora ogni primitiva di f è periodica. V F

Esercizio 3 Sia f continua in \mathbb{R} e sia $F(x) := \int_0^x f(t) dt$.

1. Se x_0 è un punto di massimo relativo per F allora $f(x_0) > 0$. V F

2. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 5$, allora esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) \geq 0$ per ogni $t \geq t_0$. V F

3. Se $f(t) < 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora F non è limitata. V F

4. Se $F(1) = 3$ e $f(t) \geq 3$ per ogni $t \in [0, 1]$, allora $f(\frac{1}{2}) = 3$. V F

Esercizio 4 Sia

$$f(x) = -3x - 3 - \frac{2}{2 + \frac{|x|}{2}}.$$

Si determinino

1. il dominio, gli intervalli di continuità
2. gli intervalli di crescita e decrescenza
3. gli intervalli di concavità, convessità e eventuali asintoti

Esercizio 5 1. Determinare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \cos(2 \sin(x - 3))$ al secondo ordine centrato in $x_0 = 3$;

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \sqrt{4(x - 3)^2 + 3}$ al secondo ordine centrato in $x_0 = 3$;

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(2 \sin(x - 3)) - 1}{\sqrt{4(x - 3)^2 + 3} - \sqrt{3}} e^{(x-3)^2}$$

